Leçon 105 : Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

1 Généralités (Rombaldi)

1.1 Permutations, cycles et transposition

- Définition de $\mathcal{S}(E)$ et $\mathcal{S}_n$ + Exemples
- Définition cycles et transpositions
- Propriétés cycles (ordre, conjugaison etc.)

1.2 Le groupe $\mathcal{S}_n$

- Si E et F même cardinale, $\mathcal{S}(E) \simeq \mathcal{S}(F)$
- Cardinal de $\mathcal{S}_n$
- Définition support + une ou deux propriété + exemple
- Définition orbite avec l'action + caractérisation des cycles
- Décomposition d'une permutation en cycles à supports disjoints

2 Structure du groupe $\mathcal{S}_n$

2.1 Générateurs

- Un cycle est un produit de transposition
- Les transpositions engendrent le groupe
- Autre famille de générateurs (les $(1, k)$ etc.)

2.2 La signature

- Définition de la signature
- Théorème : signature seul morphisme non trivial...
- Des exemples

2.3 Le groupe $\mathcal{A}_n$

- Définition + Système de générateurs
- Sous-groupes distingués de $\mathcal{S}_n$
- Dév 1 : Simplicité de $\mathcal{A}_n$
- Centre des groupes, sous-groupes dérivées etc.

3 Applications (Rombaldi, Perrin)

3.1 En algèbre

- Théorème de Cayley
- Applications : théorème de Sylow
- Des isomorphismes exceptionnels
- Matrices de Permutation + Décomposition de Bruhat

3.2 En géométrie

- Définition groupe isométries
- Dév 2 : Isométries du cube + colorations

3.3 Polynômes symétriques

- Définition + le théorème
- Relation coefficients racines + applications (Gourdon)